Trabajo Final de Astronomía

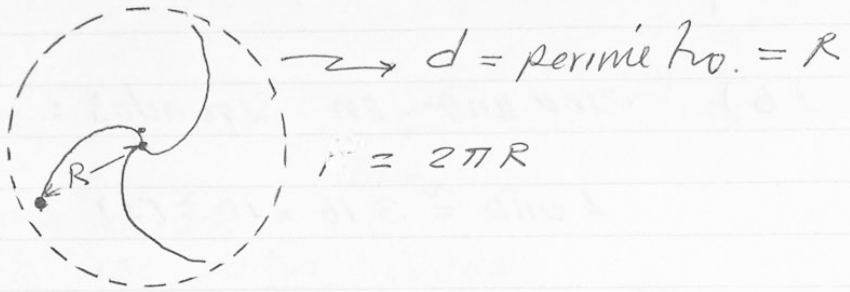
2019-2

Módulo Galaxias y Cosmología.

1. Si el sol se encuentra a 8.5 kpc del centro de la galaxia y se mueve en una orbita circular a 220 km/s, ¿

1.a ¿cuanto tiempo le toma completar una vuelta?

1.b Expresar la respuesta en segundos y años.



de la ecuación de distancia, despejamos el tiempo (t) →.

$v = d/t \rightarrow t = d/v$

$d = 2\pi R \rightarrow d = 2 \times 3.14 \times 8.5 \times 10^3 pc$

$1 pc = 3.08572 \times 10^{13} km \sim 3.09 \times 10^{13} km$

la distancia que el sol recorre en un "año galactico" es entonces:

$2 \times 3.14 \times 8.5 \times 10^3 pc \times 3.09 \times 10^{13} km$

$$\boxed{d \cong 1.647 \times 10^{18} km}$$

¿cuanto tiempo le toma al Sol recorrer esa distancia?

$$t = d/v$$

$$t = \frac{1.647 \times 10^{18}\ km}{220\ km/s}$$

$$\boxed{t = 7.49 \times 10^{15}[s] \sim 7.5 \times 10^{15}[s]}$$

1.b) Un año en segundos: $60 \times 60 \times 24 \times 365.25$

$$1\ año \cong 3.16 \times 10^{7}[s]$$

El tiempo medido en años que le toma al sol dar una vuelta completa a la vía láctea....

$$t = 7.49 \times 10^{15}[s] / 3.16 \times 10^{7}[s]$$

$$t_{años} = 237\,053\,760.9$$

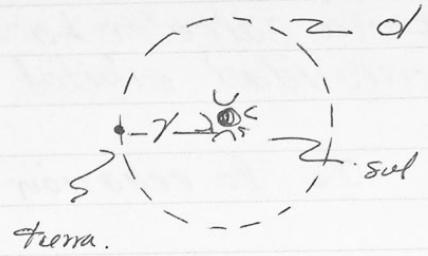
$$\boxed{t_{años} \cong 2.37 \times 10^{8}\ años.}$$

2) La velocidad de translación de una masa en órbita debido a la gravedad se expresa como:

$$v = (G \cdot M / r)^{1/2}$$

a) calcular la circunferencia de la órbita de la Tierra al rededor del sol (distancia tierra-sol ≅ 150 millones de kilómetros) (Respuesta en SI)

Veamos:



$r_{tierra-sol} = 150 \times 10^6$ Km
$= 150 \times 10^9$ m

d = distancia recorrida es un círculo de radio 150×10^9 m, luego,

$$d = 2\pi r \rightarrow d = 2 \times 3.14 \times 150 \times 10^9 m$$

$$\boxed{d = 9.424 \times 10^{11} [m]}$$

b) Calcular la velocidad a la que la tierra orbita al rededor del sol.

$v = d/t$ ó $v = d/T$ luego,

T (periodo ó tiempo que le toma a la Tierra dar una vuelta al sol)

$$T = 365.25 \times 24 \times 60 \times 60 \cong 3.156 \times 10^7 [s]$$

$$\text{Velocidad - Tierra} = \frac{9.424 \times 10^{11}\,[m]}{3.156 \times 10^{7}\,[s]}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_{Tierra} &= 2.986 \times 10^{4}\ m/s \\ &= 29.86\ Km/h \end{aligned}}$$

c) Usar la fórmula para la velocidad de translación para calcular la masa del sol a partir de la velocidad orbital de la tierra.

De la ecuación:

$$v = \sqrt{G \cdot M / r}$$

despejando M tenemos

$$M_{\odot} = \frac{(v_{Tierra})^2 \times r_{Tierra-sol}}{G}$$

$$M_{\odot} = \frac{(2.986 \times 10^{4}\ ms^{-1})^2 \times 150 \times 10^{9}\,m}{6.673 \times 10^{-11}\ Nm^2\ Kg^{-2}}$$

$$M_{\odot} = \frac{1.337 \times 10^{20}\ m^3 s^{-2}}{6.673 \times 10^{-11}\ Nm^2\ Kg^{-2}}$$

$$\boxed{M_{\odot} = 2.004 \times 10^{30}\,[Kg]}$$

3. Siguiendo la técnica utilizada en el problema anterior, calcular la masa de la vía Láctea usando la distancia del sol desde el centro galáctico. Respuestas en SI y en masas solares, suponiendo una $M_{sol} = 1.99 \times 10^{30}$ Kg.

Veamos: Según la ecuación para encontrar la masa del objeto "inmovil", necesitamos conocer la velocidad del movimiento del sol, el radio de su órbita y la constante de Gravitación Universal.

$$M_{vía\text{-}lactea} = \frac{V_{sol}^2 \times r_{sol\text{-}centro\ vía\ lactea}}{G}$$

Velocidad del sol = 220 Km/s = 220×10^3 m/s
Radio desde el sol al centro de la Vía lactea = 8.5 Mpc

$r = 8.5\ Mpc = 8.5 \times 10^3 pc =$
$1\ pc = 3.085 \times 10^{16} [m] \cong 3.09$

$$M_{vía\text{-}Láctea} = \frac{(220 \times 10^3\ ms^{-1})^2 \times 8.5 \times 10^3 pc \times 3.09 \times 10^{16} m\ pc^{-1}}{6.673 \times 10^{-11}\ N m^2\ Kg^{-2}}$$

$$= \cancel{5.768 \times 10^{25}}$$

$$= \frac{1.269 \times 10^{31}\ m^3 s^{-2}}{6.673 \times 10^{-11} (Kg\ m\ s^{-2})\ m^2\ Kg^{-2}}$$

$$\boxed{M_{vía\text{-}Lactea} = 1{,}9019 \times 10^{41} [Kg]}$$

y ya que la masa del Sol es de $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ Kg podemos expresar la masa de la vía lactea en terminos de masas solares:

$$\frac{M_{vía\text{-}Lactea}}{M_\odot} = \frac{1.9019 \times 10^{41} [Kg]}{1.99 \times 10^{30} [Kg]} = \boxed{9.557 \times 10^{10} M_\odot}$$

4. Cierta estrella Cefeida posee un periodo de 10 días. ¿Cuál será su magnitud absoluta visual? usar la fig. 2.25 del libro.

El promedio de la magnitud visual según este grafico se encuentra cercano a:

$$\boxed{\text{Cefeida con } T = 10 \text{ días} \rightarrow \simeq -4.2}$$

5. Usando el valor para $H_0 = 72\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$, calcule la distancia de una galaxia que tiene un desplazamiento al rojo de $z = 0.048$. verificar el calculo con la grafica 2.30 del libro

Recordando que el valor z es el valor del corrimiento al rojo (redshift) espectral. por definición,

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} - 1$$

la diferencia de longitudes de ondas observadas y emitidas revela el corrimiento al rojo.... y si también conocemos el valor de la constante de Hubble (H_0), podemos conocer a que distancia se encuentra cualquier galaxia, por lo menos mientras se encuentre en un radio menor o igual a $z = 0,2$

En 1929, usando un ejemplo de 24 Galaxias, Hubble presentó evidencias convincentes de una relación lineal entre el corrimiento al rojo y las distancias entre galaxias.

$$z = \frac{H_0}{c} d.$$

donde c es la velocidad de la luz $3.00 \times 10^8 \, m \, s^{-1}$ y H_0 como la constante de proporcionalidad conocida como la ¡constante de Hubble!

Sin embargo esta ecuación en un pequeño rango del corrimiento al rojo = 0.2

Volviendo al problema planteado, tenemos entonces que la distancia a la que se encuentra una galaxia con un z de 0.048 es:

$$z = \frac{H_0}{c} d \longrightarrow d = \frac{cz}{H_0}$$ por lo que:

expresando c en (terminos) unidades de $km \, s^{-1}$, tenemos:

$$d = \frac{(3.00 \times 10^5 \, km \, s^{-1}) \times 0.048}{72 \, km \, s^{-1} \, Mpc}$$

De esta manera usando la Ley de Hubble encontramos que la distancia a esta galaxia es de:

$$\boxed{d = 199.8 \, Mpc \simeq 200 \, Mpc}$$

6. Un AGN (Nucleo activo de Galaxia) a 50 Mpc parece menor de 0.1 segundos de arco en una observación en el óptico realizada por el telescopio espacial Hubble, y muestra una variabilidad en una escala de tiempo de una semana.

Calcular el límite superior para su tamaño para:

a) La observación del diámetro angular (Fig 3.26)

b) La observacion de la variabilidad (ecuac. 3.3)

Tenemos: un segundo de arco es 1/3600 de grado y hay 57.3 grados en un radián. El telescopio espacial Hubble puede resolver imagenes de hasta 0.05 arcseg. ¿qué significa?

0.05 seg de arco corresponden a un angulo

$$\frac{0.05}{(57.3 \times 3600)\,rad} = 2.4 \times 10^{-7}\,rad$$

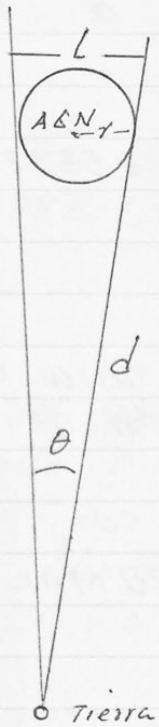
$$l = d \times \theta \quad (\theta \text{ en radianes})$$

Para el caso que nos ocupa, un tamaño angular de 0.1 arcseg corresponde a:

$$(\theta/rad) = \frac{0.1}{57.3 \times 3600} = 0.484 \times 10^{-7}$$

multiplicando el angulo obtenido en radianes por la distancia del AGN obtendremos el tamaño lineal "l"

$$L = d \times \theta = 50 \times 10^{6}\,pc \times (0.048 \times 10^{-5})\,rad$$
$$= 24\,pc$$



$L = d\,(\theta/\text{radiones})$

$L = d \times \theta$

$L = 2r$

En el caso (b) de medir la variabilidad del AGN calculado en una semana, tenemos:

1 semana = 7 días

$7 \times 24 \times 60 \times 60_s = 604800\,s$

como $R \sim \Delta t c$

$R \sim \Delta t c = 3.0 \times 10^8\, ms^{-1} \times 604800\, s$

$R \sim 1.81 \times 10^{14}\, m = 0.006\, pc$

7. Se estima que un cúmulo de Galaxias con un diámetro angular de 1.9° se encuentra a una distancia de 120 Mpc de la tierra.

a) calcular el diámetro del cúmulo en Mpc

b) ¿Cuál será su diámetro si se encontrara a una distancia de 420 Mpc?

Creamos:

convirtiendo el angulo a radianes

$\theta = 1.9° / 57.3 = 0.0332\, rad$

El diámetro del clúster corresponde a $l = 2R$ siendo R su radio, por lo tanto

$$2R = d \times \theta = 120\ Mpc \times 0{,}0332\ rad$$
$$\text{Diámetro} = 3.98\ Mpc$$

b) Si este cluster fuese visto desde una distancia de 420 Mpc con su mismo diámetro de 3.98 Mpc su ángulo sería:

$$\theta = 2R/d = 3.98\ Mpc / 420\ Mpc$$
$$= 9.48 \times 10^{-3}\ rad$$

multiplicando por los grados que contiene un radián:

$$\theta = 9.48 \times 10^{-3}\ rad. \times 57.3^{\circ}$$

$$\boxed{\theta = 0.54^{\circ}}$$

8. El grupo de Abell mas distante tiene un desplazamiento al rojo de 0.25
¿A qué distancia se encuentra este grupo?
Suponer un Ho de 72 $Km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$.

Veamos:
Usando la ecuación de Hubble

$$z = \frac{H_0}{c} d$$

y dado que

$$d = \frac{cz}{H_0} = \frac{3 \times 10^5 \, Km\, s^{-1} \times 0.25}{72 \, Km\, s^{-1}\, Mpc^{-1}}$$

$$\boxed{d = 1042 \, Mpc}$$

aproximadamente a:

1000 Mpc (con 2 cifras significativas)

Nótese que un corrimiento al rojo mayor a 0.2 está más allá del límite superior, aún así su desviación es pequeña por lo que es razonable decir que el límite de Abell más lejano se encuentra cerca de los 1000 Mpc

9. En el cúmulo de Virgo, las galaxias (elípticas) muestran una dispersión de velocidad Δv de 550 $Km\, s^{-1}$ (ver ecuac. 4.1 del libro). Calcular la masa de este cúmulo (en masas solares)

Veamos:

El corrimiento al rojo de galaxias dentro de cústeres pueden ser usado para determinar su velocidad en la dirección radial.

En este caso su masa está dada por:

$$M \approx \frac{R_A (\Delta v)^2}{G}$$

Siendo R_A el Radio de Abell y Δv su dispersión en la línea de visión

Convertimos el radio de Abell de 2Mpc a metros

$$R_A = 2\times10^6 \times 3.09\times10^6 m$$
$$R_A = 6.18\times10^{22} m$$

de la Ecuación $$M = \frac{R_A (\Delta v)^2}{G}$$

$$M = \frac{6.18\times10^{22} m \times 5.50\times10^5 m s^{-1}}{6.67\times10^{-11} m^3 Kg^{-1} s^{-2}}$$

$$M_{cluster} = 2.80\times10^{44} Kg$$

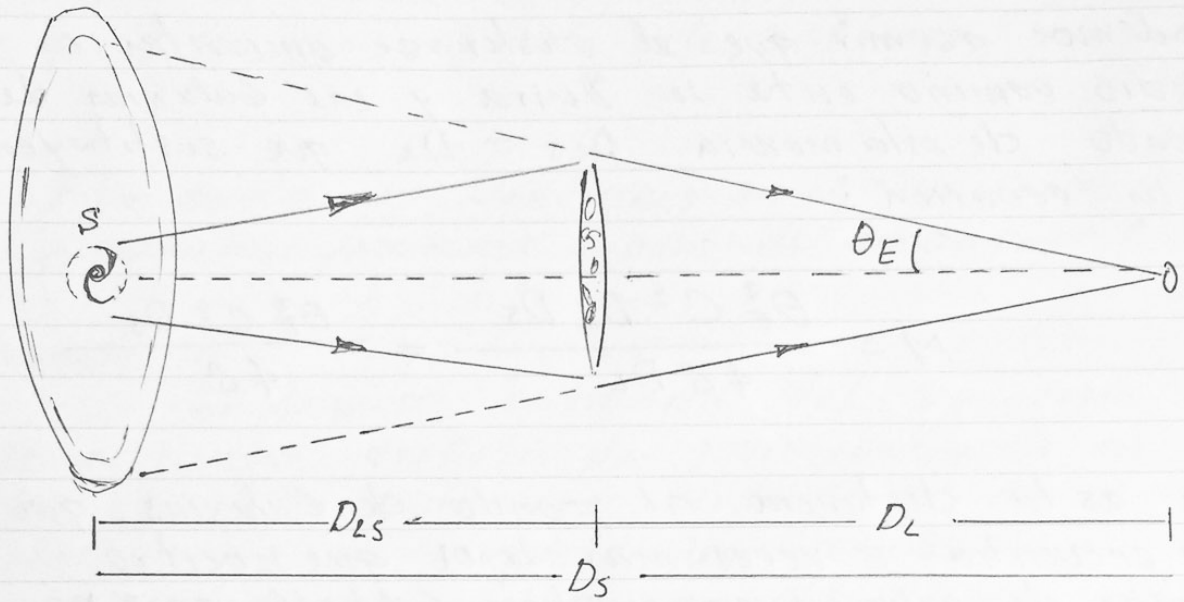
dividiendo por la masa del Sol,

$$M_{cluster} = \frac{2.80\times10^{44} Kg}{1.99\times10^{30} Kg} =$$

$$\boxed{M = 1.41\times10^{14} M_\odot}$$

10. Los arcos con lentes mas grandes en la imagen de Abell 2218 que se muestra en la Fig 4.13 tienen un radio angular de 1.0 minutos de arco. Este cúmulo es uno de los mas distantes del catálogo de abell: con un desplazamiento al rojo de $z = 0.17$, y se encuentra a una distancia aproximada de 700 Mpc de la Tierra. Usando estos valores y asumiendo que la ecuac. 4.2 se puede aplicar a esta lente gravitacional, estimar la masa de Abell 2218 en masas solares. Suponer que el grupo esta a medio camino entre las galaxias de

Fondo y la Tierra.



La galaxia S se encuentra en la línea de visión del observador "O" justo detrás de un clúster. Los rayos de luz son distorsionados de igual forma radialmente, resultando en un anillo simétrico. Son conocidos como "anillos de Einstein"

Su radio angular esta dado por:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_L D_S}}$$

Despejando la Masa, tenemos:

$$\theta_E^2 = \frac{4GM}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_L D_S}$$

$$M = \frac{\theta_E^2 \, c^2 \, D_L \, D_S}{4G D_{LS}}$$

Podemos asumir que el cluster se encuentra a medio camino entre la Tierra y las Galaxias de Fondo, de esta manera $D_{LS} = D_L$ que sustituyendo en la ecuación:

$$M = \frac{\theta_E^2 \, C^2 \, D_L \, D_S}{4G D_L} = \frac{\theta_E^2 \, C^2 \, D_S}{4G}$$

D_S es la distancia al Fondo de Galaxias, que se encuentra 2 veces más lejos que nuestro cluster de galaxias en cuestion (Abell 2218) de manera que $D_S =$.

$$2D_S = 700 \, Mpc \times 2 = 1400 \, Mpc$$

Convirtiendo el angulo θ_E a radianes, tenemos

$$\theta_E = (1.0/60)(1/57.3) \, rad = 2.91 \times 10^{-4} \, rad.$$

Ahora, ya podemos calcular la Masa del cluster de Abell 2218:

$$M = \frac{\theta_E^2 \, C^2 \, D_S}{4G} = \frac{(2.91 \times 10^{-4})^2 (3 \times 10^8 \, m s^{-1})^2 \times 1400 \times 3.09 \times 10^{22} \, m}{4 \times 6.67 \times 10^{-11} \, N m^2 \, Kg^{-2}}$$

$$\boxed{M = 1.24 \times 10^{45} \, Kg} \qquad M = \frac{1.24 \times 10^{45} \, Kg}{1.99 \times 10^{30} \, Kg} = \boxed{6.23 \times 10^{14} \, M_\odot}$$

El libro menciona masas de clusters típicos de entre 10^{14} y 10^{15} masas solares.
El resultado de $6.2 \times 10^{14} M_\odot$ es consistente con el cluster de Abell 2218 el cual es uno de los clusterés mas ricos de este catálogo.

11. Por cada 10 Neutrones en el Universo, ¿cuantos protones esperarías encontrar?

Veamos:

Si la masa barionica del universo se encuentra distribuida principalmente en dos elementos químicos: Hidrogeno (H) y Helio (He) en proporciones de 75% y 25% respectivamente, se deduce que el universo esta compuesto de una parte de He por tres de H.

Si el Helio es Helio-4 (dos protones + 2 neutrones) y el Hidrógeno solo tiene un protón, se concluye facilmente que en cada cuadrante de la Fig. 1 la proporción de masas ha de ser igual, es decir el Helio aporta 2 protones y 2 Neutrones, el Hidrógeno en cada uno de los 3 cuadrantes restantes aporta 4 protones.

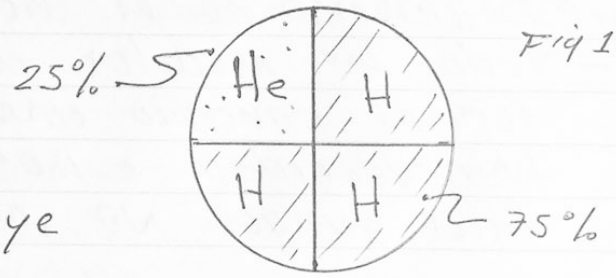


Fig 1

$$He = 2p + 2N = 2p + 2N$$
$$H = (4p) \times 3 = 12p + \emptyset N$$
$$= 14p + 2N$$

Ello implica una proporción matemática de

$$\frac{14p}{2n} = \frac{7p}{1n}$$

de lo que necesariamente se deriva que por cada neutron en el Universo existiran siete protones...

Luego, por cada 10 neutrones se esperaría encontrar 70 protones en el universo.

12. En el contexto de los modelos de Friedmann - Lemaitre - Roberton - walker cuales valores de los parametros de k y Λ corresponden a universos con las siguientes características:

a) El universo no es homogéneo ni isotrópico?
- Todos los modelos de FLRW son consistentes con el principio cosmológico el cual requiere homogeneidad e isotropía, por lo que tales rangos NO SON POSIBLES.

b) No hay posibilidad de una gran explosión?
- Sólo un parametro de curvatura $k = +1$ con una constante cosmológica ente cero y un particular valor de Λ (llamado Λ_E) $= 4\pi G\rho / c^2$ puede albergar la posibilidad de un universo sin big bang, es decir, estático

c) Un big bang es posible, pero hay almenos otra posibilidad (supongamos que $\rho > \phi$)

- Es el mismo caso de la respuesta del numeral "b" para un valor de $K = +1$ y $0 < \Lambda \leq \Lambda_E$

d) El punto particular donde ocurrió el big bang todavía puede ser determinado mucho despues del evento.

- De saberse violaría el principio cosmológico. No hay rangos que permitan un Big Bang asociado a un único punto del espacio.

e) En cualquier momento las propiedades geométricas a gran escala del espacio son idénticas a las del espacio tredimensional con una geometría plana.

- cualquier modelo con un parametro de curvatura $K = +1$ será consecuente con una geometría plana.

f) El espacio tiene un Volumen Finito y Las Lineas "rectas" que inicialmente son paralelas eventualmente se encuentran.

- Esto es correcto en cualquier modelo con un $K = +1$

g) Hay una gran explosión, pero el Volumen del Universo (espacio) es infinito desde los primeros tiempos.

- En todos los modelos con $K = 0$ ó $K = -1$

13. Se estima la densidad de masa promedio actual de toda la materia, tanto luminosa como oscura, aproximadamente:

$$\rho_{m,0} \approx 3 \times 10^{-27} \ Kg \ m^{-3}$$

Usando la equivalencia entre la energía E y la masa m dada por $E = mc^2$ calcule la densidad de la energía promedio actual debido a la materia.

La definición de densidad de masa nos dice que:

$$\rho_m = \frac{m}{V}$$

La densidad de energía viene dada por:

$$\upsilon = \frac{E}{V}$$

Deberemos calcular la energía equivalente a una masa m contenida en un volumen V

usando la ecuación de Einstein, tenemos:

$$E = mc^2 \longrightarrow \upsilon = \frac{E}{V} = \frac{mc^2}{V} = \frac{m}{V} c^2$$

como $\frac{m}{V} = \rho_m$ entonces,

$$v = \rho_m C^2$$

Reemplazamos el valor dado,

$$v = 3 \times 10^{-27}\ Kg/m^3 \times (3.0 \times 10^8\ ms^{-1})^2$$

$$\boxed{v = 2.7 \times 10^{-10}\ Kg\, s^{-2}\, m^3 \rightarrow 2.7 \times 10^{-10}\ J\, m^{-3}}$$

14. Puede usarse la ecuación 6.19

$$\frac{T}{K} \approx 1.5 \times 10^{10} \times (t/s)^{-1/2}$$

para encontrar la edad del universo para una temperatura dada.
¿cuál era la edad del universo cuando la temperatura era 10^6 K en años?

De la ecuación anterior, despejamos el tiempo t

$$(t/s)^{1/2} \approx 1.5 \times 10^{10} / (T/K)$$ (temperatura en Kelvin y tiempo en segundos)

tomando la raíz cuadrada a ambos lados,

$$\left(\frac{t}{s}\right) \approx [1.5 \times 10^{10} / (T/K)]^2$$

Si hacemos $T = 10^6 K$

$$t = (1.5 \times 10^{10} / (10^6))^2 \rightarrow$$

$$t = (1.5 \times 10^4)^2 = 2.25 \times 10^8\ s$$

$t = 2.25 \times 10^8 s \,/\, 31536000 s$

$t = 7.134$ años.

Ello muestra que cuando el universo tenía una Temperatura de $10^6 K$, el universo sólo tenía 7 años!

15. Calcular cual era la edad del Universo cuando las interacciones fuertes y débiles se separaron.

Según el Gráfico de la pagina 272 del Libro, la energía presente en el momento de la separación de la energía fuerte y electro debil andaba por el orden de:

10^{15} GeV y aproximia un tiempo, según la gráfica de $10^{-36} s$

Veamos:

En la Ecuación 6.20 vemos que:

$E \sim kT$ siendo k la constante de Boltzmann: $k = 1.38 \times 10^{-23} J K^{-1}$

$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} J$
$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$
$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$

... --- ...

de la ecuacion de la energia en terminos de la temperatura y la constante "K", tenemos:

$$E \cong KT \rightarrow T \sim \frac{E}{K}$$

Reemplazando la energia de 10^{15} GeV tenemos:

$$T \cong \frac{10^{15} \times 10^{9}\, eV \times 1.6 \times 10^{-19} J(eV^{-1})}{1.38 \times 10^{-23} J K^{-1}}$$

$$T \cong 1.16 \times 10^{28} K$$

En el momento de la gran Unificacion la temperatura excedia los 10^{28} grados kelvin

Usando la Ecuacion del punto anterior donde despejamos el tiempo en segundos

$$t_{(s)} \cong (1.5 \times 10^{10} / T_{(K)})^2$$

Reemplazando la Temperatura en el momento de la gran unificacion:

$$t_{(s)} \sim \left(\frac{1.5 \times 10^{10}}{10^{28} K}\right)^2 = 2.25 \times 10^{-36} seg.$$

Estos datos estan en concordancia con la tabla del libro donde

$$t \sim 10^{-36} segundos$$

16. Use la Ley de Hubble para calcular la distancia de una supernova en una galaxia con un desplazamiento al rojo de $z = 1.0$. Explicar por qué la distancia puede no ser una buena estimación de la verdadera distancia de la galaxia.

Usando la Ley de Hubble para calcular la distancia

$$d = \frac{cz}{H_0}$$

Tenemos que: $z = 1.0$; $H_0 = 72\ km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}$

$$d = \frac{3 \times 10^5\ km\,s^{-1} \times 1}{72\ km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$$

$$d = 42 \times 10^3\ Mpc$$

Este cálculo puede resultar impreciso debido a que la ley de Hubble ignora el efecto de la aceleración del universo, principalmente a grandes distancias.

Nota: ¡Qué gran repaso y aprendizaje a lo largo de estas 22 páginas!

Gracias Profe Pablo Cuartas

Por Uriel A. Hurtado A.
Nov 23 - 2019